

Chapitre 6

CALCUL INTÉGRAL

Objectif pédagogique principal :

- Découvrir une nouvelle notion qui servira à calculer des aires de surfaces planes.

Leçon 1 : NOTION D'INTÉGRALE

Objectifs pédagogiques :

- Calculer une intégrale.
- Utiliser l'intégrale pour déterminer une primitive de fonction.
- Calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.

1.1) Définition

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b , éléments de I .

On appelle **intégrale de a à b** de la fonction f , le **nombre réel** noté $\int_a^b f(x)dx$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une **primitive** de f sur l'intervalle I .

Remarque

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit : « **somme ou intégrale de a à b , $f(x)dx$** ».
- La variable x est une **variable muette** : elle disparaît lorsque le calcul est effectué.
- La variable x peut être remplacée par t , u ou tout autre lettre à l'exception de a et b .

Application : Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^4 (x-3)dx$$

.....
.....
.....

$$J = \int_2^1 \left(t^2 + t - \frac{1}{t}\right)dt$$

.....
.....
.....

$$K = \int_0^1 t e^{t^2-1} dt$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$L = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$M = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{u \cos u - \sin u}{u^2} du$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$N = \int_0^\pi \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

1.2) Valeur moyenne

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

La valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ est le nombre réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Application :

Calculer la valeur moyenne de la fonction sinus sur $[0; \pi]$.

.....

.....

.....

.....

1.3) Propriétés algébriques de l'intégrale

Les propriétés suivantes découlent de la définition d'une intégrale.

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . Pour a, b, c éléments de I , on a :

$$(1) \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$(3) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$(2) \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$(4) \quad \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

- La relation (3) est la **relation de CHASLES** pour les intégrales.
- La relation (4) traduit la linéarité de l'intégrale.

1.4) Intégrale et inégalités

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$.

- Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $f \geq g$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- Si $\forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
(**inégalité de la moyenne**)

Application 1 :

Déterminer un encadrement de l'intégrale suivante : $I = \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Application 2 :

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$.

Pour $\alpha > 1$, on pose $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x)dx$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (x+1)e^{-x}$.

.....		
.....		
.....		

2. Démontrer que, pour tout $x \in]1; +\infty[$, on a $e^{-x} \leq f(x) \leq xe^{-x}$.

.....		
.....		
.....		

3. En déduire un encadrement de $I(\alpha)$.

.....		
.....		
.....		
.....		
.....		
.....		
.....		

4. Calculer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

.....		
.....		
.....		
.....		
.....		
.....		

Leçon 2: TECHNIQUES DE CALCUL D'UNE INTÉGRALE

Objectifs pédagogiques :

- Calculer une intégrale en utilisant une intégration par parties.
- Calculer une intégrale en faisant un changement de variable affine.
- Calculer une intégrale en utilisant la parité ou la périodicité d'une fonction.

Nous avons vu que l'intégrale se calcule à l'aide d'une primitive de la fonction à intégrer. Mais très souvent il n'est pas évident de trouver **directement** cette primitive.

Nous verrons donc dans cette leçon des techniques qui nous « faciliterons » le calcul de l'intégrale.

2.1) L'intégration par parties

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit a et b deux éléments de I .
On a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Application 1 : Calculer les intégrales suivantes, à l'aide d'une intégration par parties.

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_1^e x^n \ln x dx$$

.....
.....
.....
.....
.....

$$J = \int_0^1 t e^{-t} dt$$

.....
.....
.....
.....
.....

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

.....
.....
.....
.....
.....

$$M = \int_1^2 (2t+1)\sqrt{t+5} dt$$

.....
.....
.....
.....
.....

Application 2 :

Calculer les intégrales suivantes, à l'aide de deux intégrations par parties.

$$\forall \lambda \in]1; +\infty[, \quad I_\lambda = \int_1^\lambda (1-x^2)e^{-x} dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$I = \int_0^\pi e^t \cos t dt$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.2) Changement de variable

Application :

Calculer l'intégrale suivante, à l'aide d'un changement de variable.

$$I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x} dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.3) Intégrales de fonctions paires, impaires ou périodique

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un élément de I .

- Si f est **paire** sur I , alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.
- Si f est **impair** sur I , alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
- Si f est **périodique** de période T sur I , alors $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

Application 1 : Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{x}{3} \sin^2 x dx$$

.....

$$\int_{-1}^1 |x^3| dx$$

.....

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2 + \cos x \sin^2 x} dx$$

.....

.....

Leçon 3: INTÉGRALE ET CALCUL D'AIRES

Objectif pédagogique :

- Calculer l'aire d'une partie du plan délimitée par deux courbes et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

3.1) Relation entre aire et intégrale

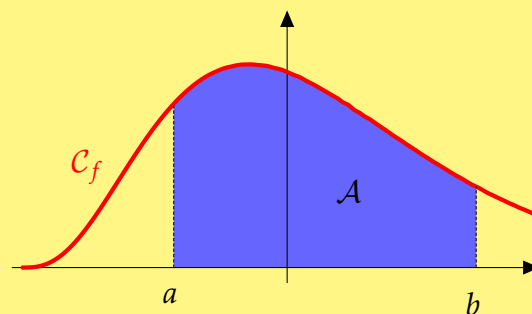
Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ et soit C_f et C_g leurs représentations graphiques respectives dans un repère orthogonal (O, I, J) . On appelle unité d'aire, l'aire du rectangle construit à partir des points O, I et J .

Soit $\mathcal{A}$ l'aire (en unités d'aire) délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

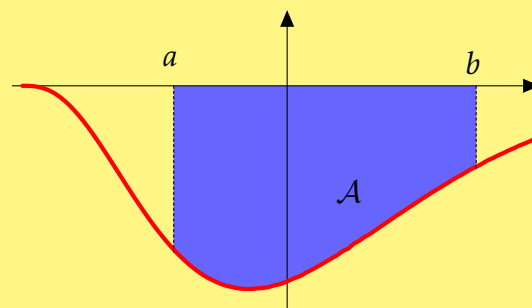
- Si f est **positive** sur $[a; b]$ alors :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$$



- Si f est **négative** sur $[a; b]$ alors :

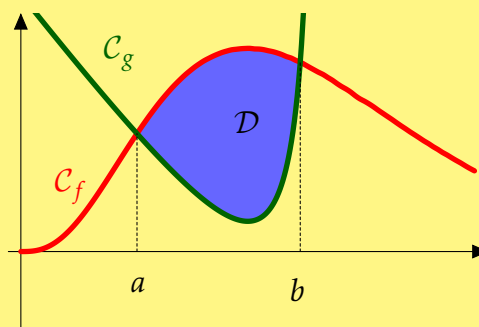
$$\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) dx$$



Soit $\mathcal{D}$ l'aire comprise entre les deux courbes et les droites $x = a$ et $x = b$.

- Si $f - g$ est **positive** sur $[a; b]$ alors :

$$\mathcal{D} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



3.2) Applications

Application 1 :

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unité 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées. Calculer l'aire comprise entre la parabole d'équation $y = x^2$, la première bissectrice et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Application 2 :

On considère deux fonctions f et g définies respectivement sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes respectives des fonction f et g .

1. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

.....	
.....	
.....	
.....	

2. Étudier les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

3. Calculer l'aire délimitée par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	