

LEÇON 8 : PRIMITIVES ET CALCUL INTEGRAL

1 - PRIMITIVES D'UNE FONCTION

1.1-Définition

Soit f une fonction et I un intervalle sur lequel f est définie.

Les **primitives** de f sur I (s'il en existe) sont les **fonctions** F définies et dérivables sur I vérifiant pour tout $x \in I$: $F'(x) = f(x)$.

Exemples

- Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2$, les fonctions $f : x \mapsto \frac{x^3}{3}$ et $x \mapsto \frac{x^3}{3} + 7$ sont les deux primitives de f sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\ln$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

1.2-Théorèmes

a) Théorème 1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des **primitives** sur I .

b) Théorème 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I .

Les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + k$ où k est une constante réelle.

c) Théorème 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive de f sur I prenant la valeur b en a .

1.3-Détermination pratique des primitives

a) Méthode

En pratique pour déterminer une primitive d'une fonction sur un intervalle, on utilise les tableaux suivants :

▪ *Tableau des primitives des fonctions élémentaires*

Fonctions	Primitives	Intervalle
$x \mapsto k$	$x \mapsto kx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$ si $n < -1$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $n \neq 1$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$] 0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x $	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$

▪ *Tableau des primitives et opérations sur les fonctions*

Fonctions	Primitives	Remarque
$u+v$	$U+V$	
ku	kU	
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n < -1$ alors $u \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{u^n}$ $n \neq 1$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$u \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	$u \neq 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	

$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto \frac{1}{a}U(ax+b)$	
$v'x (u' \circ v)$	$U \circ V$	

b) Applications

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. Sur $\mathbb{R}^*$ de $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 + \frac{5}{x^3}$
2. Sur $\mathbb{R}$ de $g : x \mapsto (3x^2 - 2x + 3)(x^3 - 2x^2 + 3x + 1)^4$
3. Sur $\mathbb{R}$ de $h : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$
4. Sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ de $u : x \mapsto \frac{5}{3x + 2}$
5. Sur $\mathbb{R}^*$ de $k : x \mapsto \frac{5x^7 - 2x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 6x - 1}{x^4}$

2 - CALCUL INTEGRAL

2.1-Généralités

a. Théorème

Soit f une fonction contenue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I et F une primitive de f sur I .

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Remarque

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle, I dont la dérivée, f' , est contenue sur I et a et b deux éléments de I . La fonction f est une primitive sur I de la fonction f' continue sur cet

intervalle, donc : $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$.

b. Notations et vocabulaire

- On écrit : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- L'expression « $[F(x)]$ » se lit : « $F(x)$ pris entre a et b »
- a et b sont les bornes de l'intégrale.

c. Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I .

$$(1) \text{ On a : } \int_a^a f(t) dt = 0.$$

$$(2) \text{ On a : } \int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt.$$

d. Applications

$$1) \text{ Calculer : } \int_1^4 (5x^3 + 4x^2 + 3x - 5) dx$$

$$2) \text{ Calculer : } \int_2^5 (5e^{2t} - 2e^{5t}) dt$$

$$3) \text{ Calculer : } \int_{-1}^3 \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$4) \text{ Calculer : } \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

2.2- Propriétés algébriques

a. Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et a, b, c trois éléments de I .

$$\text{On a : } \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$$

b. Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , et a, b deux éléments de I .

$$(1) \text{ On a : } \int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

$$(2) \text{ On a : } \int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt.$$

c. Application

$$\text{Calculer : } \int_0^5 |(x-1)^2 - 4|dx$$

2.3-Valeur moyenne

a. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $[a; b]$ un intervalle non déduit à un point inclus

dans I . **La valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ est le nombre réel μ défini par : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$.

b. Application

Déterminer la moyenne :

$$1) \text{ De } x \mapsto x^2 \text{ sur } [1; 4].$$

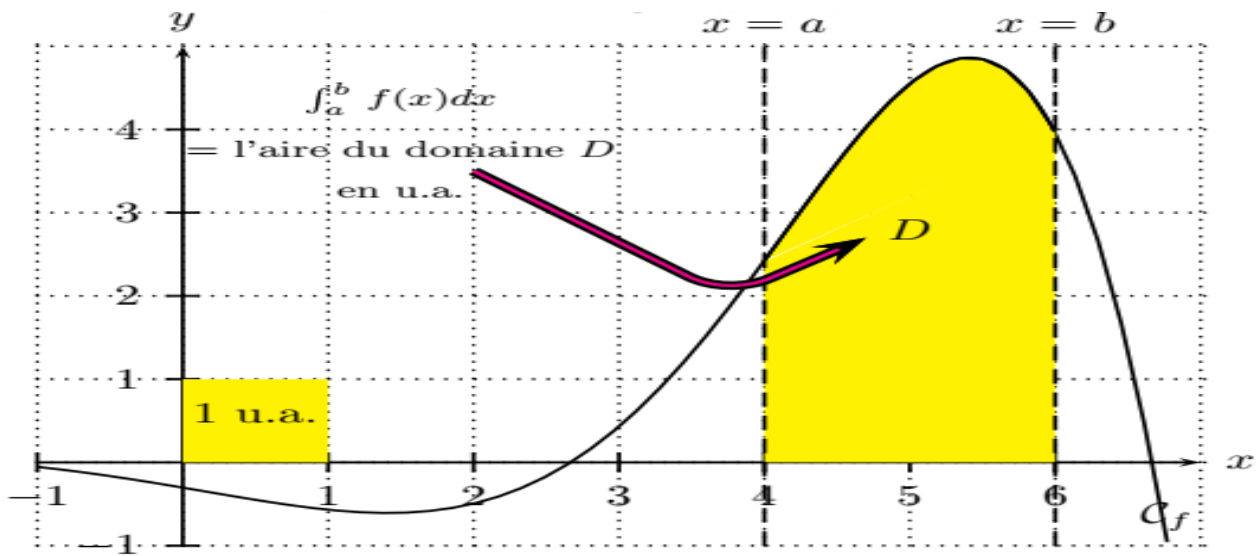
$$2) \text{ De } x \mapsto x^2 \text{ sur } [-1; 1]$$

2.4-Calcul d'aire

a. Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et (C_f) sa courbe représentative. La mesure de l'aire, en U_a , sous la courbe (C_f) entre les abscisses a et b est donné par :

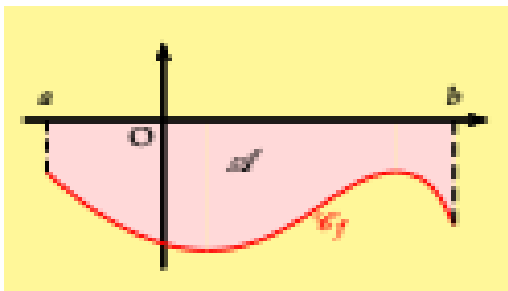
$$A = \int_a^b f(t)dt \times U_a$$



b. Propriété

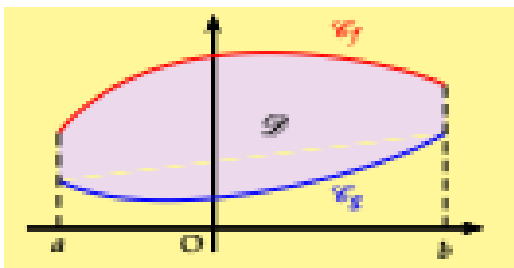
- Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ telle que $f \leq 0$. Soit $\mathcal{A}$ l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

On a alors : $\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) dx$



- Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle $[a;b]$ telles que $f \geq g$. Soit $\mathcal{D}$ l'aire comprise entre les deux courbes et les droites $x = a$ et $x = b$. On a alors :

$$\mathcal{D} = \int_a^b (f - g) dx$$



c. Applications

Application 1

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$.

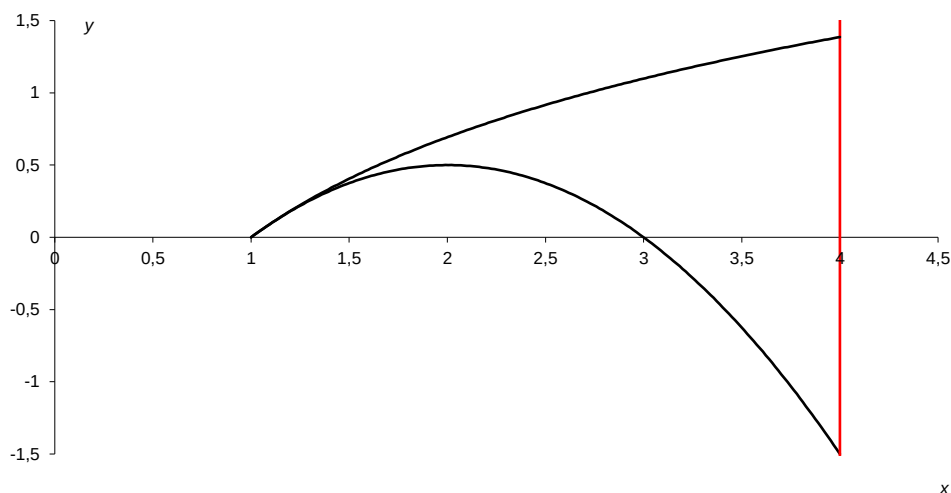
Sur le graphique joint, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien ($\ln$) sur l'intervalle $[1; 4]$. On a également tracé la droite (d) d'équation $x = 4$.

1. a. Démontrer que $\int_1^4 h(x) dx = 0$.

b. Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.

2. On note D le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1 ; 4]$.

En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire de D en unités d'aire.



Application 2

a. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f .

b. Calculer l'aire en cm^2 de la région du plan comprise entre les axes de coordonnées, la courbe C et la droite d'équation $x = 3$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

