

## Chapitre 4

# FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE ET FONCTIONS PUISSANCES

### Objectif pédagogique principal :

- Étudier et représenter les fonctions exponentielles et puissances.

## Leçon 1 : FONCTION EXPONENTIELLE

### Objectifs pédagogiques :

- Résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir des fonctions exp.
- Étudier et représenter une fonction comportant exp.

### 1.1) Définition

#### *D*éfinition et conséquences

On appelle **fonction exponentielle népérienne** ou tout simplement **fonction exponentielle**, la **bijection réciproque** de la fonction  $\ln$ . On note  $\exp$  la fonction exponentielle. La fonction  $\exp$  est définie sur  $\mathbb{R}$  ; Elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $]0; +\infty[$ . On a donc :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$
- $\exp(0) = 1$  puisque  $\ln 1 = 0$  et  $\exp(1) = e$  puisque  $\ln(e) = 1$

### 1.2) Propriétés algébriques de la fonction exp

#### *P*ropriété

- Soient  $a, b$  et  $r$  des nombres réels quelconques. On a :

$$(1) \quad \exp(a) \times \exp(b) = \exp(a + b) \qquad (2) \quad \frac{\exp(a)}{\exp(b)} = \exp(a - b)$$

$$(3) \quad \frac{1}{\exp(b)} = \exp(-b) \qquad (4) \quad [\exp(a)]^r = \exp(ra)$$

- Pour tous nombres réels  $a, b$  :

$$(5) \quad \exp(a) = \exp(b) \iff a = b \qquad (6) \quad \exp(a) < \exp(b) \iff a < b$$

- Les fonctions  $\ln$  et  $\exp$  étant réciproques, pour  $a \in \mathbb{R}$  et pour  $b \in \mathbb{R}_+^*$  on a :

$$(7) \quad \exp(a) = b \iff a = \ln(b).$$

## Remarque : Notation $e^x$

Pour tout nombre réel  $x$ , on a :  $\exp(x) = \exp(x \times 1)$ .

D'après la relation (4) précédente, on peut donc écrire :

$$\exp(x) = [\exp(1)]^x.$$

Or  $\exp(1) = e$  ; Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x.$$

Les relations précédentes s'écrivent alors (avec les mêmes hypothèses correspondant à chaque relation) :

$$(1) \quad e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$(2) \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$(3) \quad \frac{1}{e^b} = e^{-b}$$

$$(4) \quad (e^a)^r = e^{ra}$$

$$(5) \quad e^a = e^b \iff a = b$$

$$(6) \quad e^a < e^b \iff a < b$$

$$(7) \quad e^a = b \iff a = \ln(b)$$

### Application 1 :

1. Simplifier au maximum l'écriture des nombres suivants :

$$\left( \frac{e^{2x+3} \times e^{3x-2}}{e^{4+5x}} \right)^{-2}$$

$$\left( e^{-x+1} \times e^{3x+2} \right)^3$$

.....  
 .....  
 .....  
 .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$e^{3x-1} = 5$$

$$e^{1+x} = e^{\frac{1}{x}}$$

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

$$e^{2x^2+3} \geq e^{7x}$$

$$8 + 3e^{-2x+3} > 11$$

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

#### Application 2 :

On considère la fonction polynôme définie par  $f(x) = -x^3 + 10x^2 - 11x - 70$ .

1. Vérifier que  $-2$  est un zéro de la fonction  $f$ .

.....  
 .....  
 .....

.....  
 .....  
 .....

2. Déterminer les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $f(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$ .

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = 0$ .

.....  
 .....  
 .....

.....  
 .....  
 .....

|       |       |
|-------|-------|
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |

4. Étudier le signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

|       |       |
|-------|-------|
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |

5. Dédurre de ce qui précède les solutions de :

a)  $-e^{3x} + 10e^{2x} - 11e^x - 70 = 0$ .

|       |       |
|-------|-------|
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |

b)  $-e^{3x} + 10e^{2x} - 11e^x - 70 \leq 0$ .

|       |       |
|-------|-------|
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |

### 1.3) Calcul de limites avec exp

#### *Propriété* Limites de référence

Les limites suivantes seront démontrées à titre d'exercice de recherche.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

#### Application :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (e^{2x} - 1)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1 + e^{-x})$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\lim_{x \rightarrow +} (e^{2x} - (x + 1)e^e)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### 1.4) Dérivées de fonctions contenant exp

Soit  $a$  un nombre réel quelconque.

Étudions la dérivabilité de la fonction exp en  $a$ . Il nous faut donc étudier la limite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}$ .

Pour cela, posons  $X = x - a$ , on a alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{X \rightarrow 0} e^a \times \frac{e^X - 1}{X} = e^a.$$

Pour tout nombre réel  $a$ , la fonction exp est donc dérivable en  $a$  et le nombre dérivé de la fonction exp en  $a$  est  $e^a$ .

### Propriété

- La fonction exp est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et est égale à sa fonction dérivée.

- Soit  $u$  une fonction dérivable sur l'intervalle  $I$ .

Alors la fonction  $e^u$  est dérivable sur l'intervalle  $I$  et on a :

$$\forall x \in I, (e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

**Application :** Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes en indiquant à chaque fois l'ensemble de dérivation.

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

$$g(x) = xe^{-x^2}$$

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

$$h(x) = \frac{1 - 2x}{x^2} e^{2x}$$

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

$$k(x) = (-1 + e^{-x^2}) \ln x$$

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

### 1.5) Primitives avec la fonction exp

#### Propriété

Soit  $u$  une fonction dérivable sur l'intervalle  $I$ .

Alors la fonction  $e^u$  est une primitive sur  $I$  de la fonction  $u'e^u$

**Application :** Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes en indiquant à chaque fois l'ensemble d'intégration.

$$f(x) = -xe^{x^2}$$

.....  
 .....  
 .....

$$g(x) = 1 - x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

.....  
 .....  
 .....

$$h(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

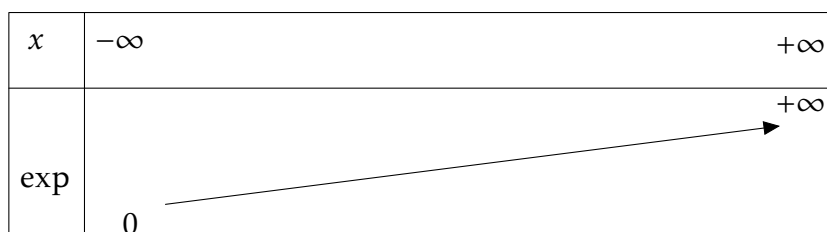
.....  
 .....  
 .....  
 .....

$$k(x) = -\frac{e^{-2x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}$$

.....  
 .....  
 .....  
 .....

### 1.6) Représentation graphique de la fonction exp

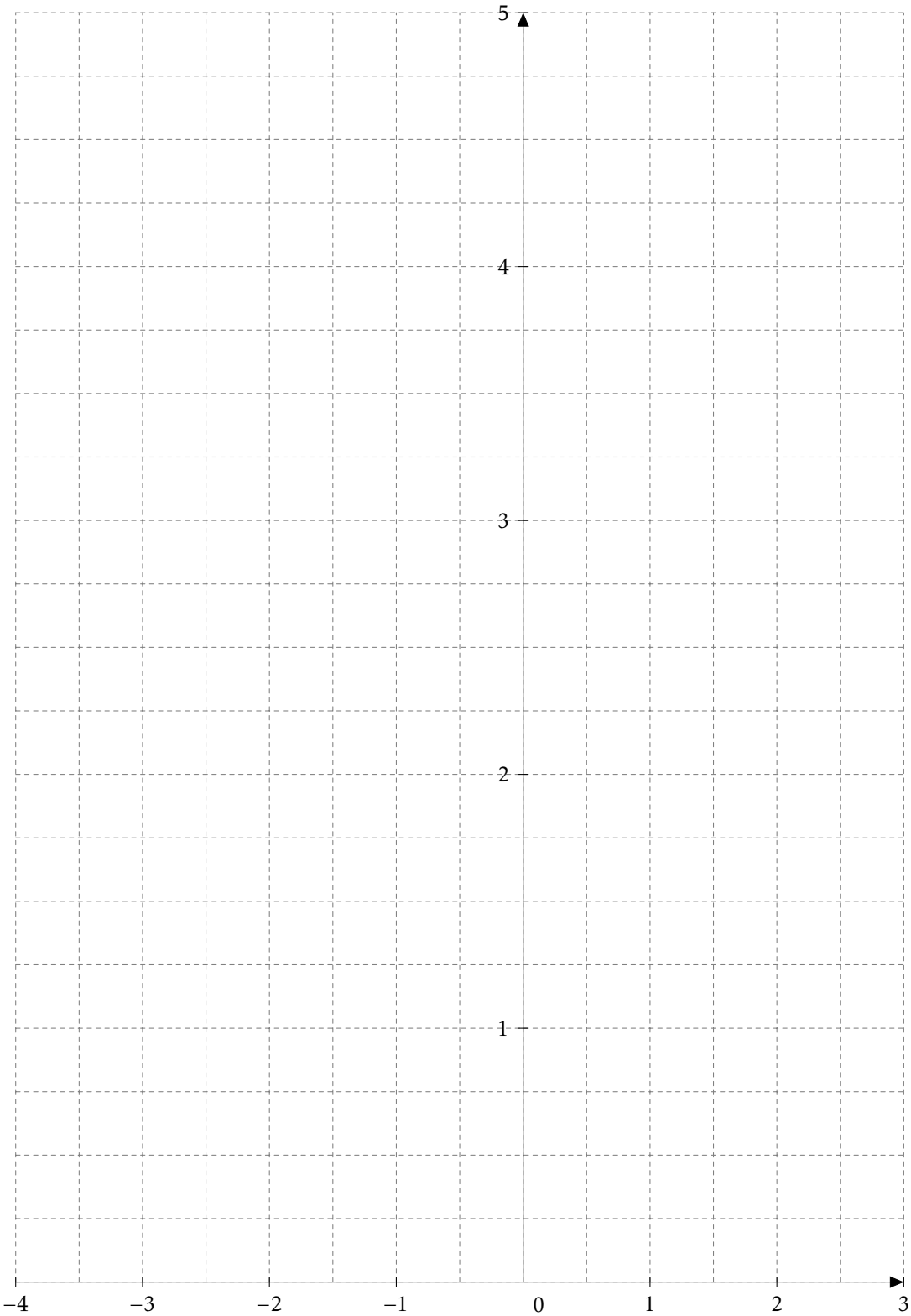
La fonction exp est définie sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ , strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , d'où la courbe de la fonction exp admet une asymptote d'équation  $y = 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ , d'où la courbe de la fonction exp admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Complétons le tableau de valeurs suivant :

|        |    |    |    |    |      |   |     |      |   |     |
|--------|----|----|----|----|------|---|-----|------|---|-----|
| x      | -4 | -3 | -2 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 0,75 | 1 | 1,5 |
| exp(x) |    |    |    |    |      |   |     |      |   |     |





## 1.7) Études de fonction contenant exp

### Problème 1 :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ . On note  $(\mathcal{C})$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité graphique : 2 cm.

#### Partie A

1. a) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
b) Interpréter graphiquement les résultats trouvés.
2. a)  $f'$  étant la fonction dérivée de  $f$ , calculer  $f'(x)$  pour tout nombre réel  $x$ .  
b) Étudier le signe de  $f'(x)$  puis en déduire le sens de variation de  $f$ .  
c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
3. a) Démontrer que le point  $A(0; 1)$  est un centre de symétrie de la courbe  $(\mathcal{C})$ .  
b) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 0.
4. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = f(x) - (x + 1)$ .  
a) Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ , on a :  $g'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$ .  
b) En déduire le tableau de variation de  $g$ .  
c) Calculer  $g(0)$  puis déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .  
d) Déduire de ce qui précède la position de la courbe  $(\mathcal{C})$  par rapport à la tangente  $(T)$ .
5. Tracer dans le repère  $(O, I, J)$ , la tangente  $(T)$ , les asymptotes et la courbe  $(\mathcal{C})$ .

#### Partie B

1. Déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$ .
2. Calculer l'aire du domaine du plan délimité par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \alpha$  ( $\alpha > 0$ ).

### Problème 2 :

Soit  $f$  la fonction dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{x|x|}$ .

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité graphique : 2 cm.

1. Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$  puis interpréter graphiquement le résultat.
2. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .  
b) En déduire une interprétation graphique.
3. a) Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \frac{f(x) - 1}{x}$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{f(x) - 1}{x}$ .  
b) Donner une interprétation de ces résultats.  
c) Étudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
4. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
5. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$  par :  $g(x) = e^{-x^2} - (x\sqrt{2} + 2)e^{-\frac{1}{2}}$ .  
a) Justifier que  $\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] : g''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ .  
b) Étudier les variations de  $g'$ .

- c) Étudier le signe de  $g'$  sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ .
  - d) En déduire le sens de variation de  $g$  sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ .
  - e) Étudier les positions de  $(\mathcal{C})$  relativement à  $(T)$ .
6. Tracer  $(T)$  puis  $(\mathcal{C})$ .

### Problème 3 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ .

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité graphique : 2 cm.

1. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .  
b) Donner une interprétation graphique du résultat obtenu précédemment.
2. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .  
b) En déduire une interprétation graphique.
3. On suppose que  $f$  est dérivable et on note  $f'$  sa fonction dérivée.  
a) Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$ .  
b) Étudier le signe de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ .  
c) En déduire les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
4. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 0.
5. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = (1 + x)e^{-x} - 1$ .  
a) On suppose que  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $h'$  sa fonction dérivée.  
Calculer  $h'(x)$ .  
b) Étudier les variations de  $h$ .  
c) calculer  $h(0)$  et dresser le tableau de variation de  $h$ . On ne demande pas de calculer les limites de  $h$ .  
d) En déduire le signe de  $h(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .  
e) Vérifier que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = +x - 1 = (1 - x)h(x)$ .  
f) Déduire des questions précédentes la position relative de  $(\mathcal{C})$  et  $(T)$ .
6. Tracer la tangente  $(T)$  et la courbe  $(\mathcal{C})$ .  
On prendra :  $f(1 - \sqrt{2}) = 1,3$  et  $f(1 + \sqrt{2}) = -0,4$ .

## Leçon 2: FONCTIONS PUISSANCE

### Objectifs pédagogiques :

- Utiliser les limites sur la croissance comparée pour calculer d'autres limites.
- Étudier et représenter graphiquement une fonction puissance.

### 2.1) Définition

## Définition

On appelle **fonction puissance** d'un réel  $a$  **strictement positif**, la fonction  $f_a$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_a(x) = a^x \quad \text{avec} \quad a^x = e^{x \ln(a)}.$$

Exemples :  $3^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 3}$  et  $5^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\ln 5}$ .

## Remarque

Il s'agit de la généralisation de la fonction puissance avec les entiers relatifs. Cependant cette généralisation se fait au détriment de la puissance d'un nombre négatif qui était possible pour les entiers relatifs mais qui à cause de  $\ln(a)$  devient impossible pour une puissance réel :  $(-2)^7$  existe, par contre  $(-2)^{\sqrt{3}}$  n'existe pas.

## Propriété

La fonction puissance est **strictement positive** sur  $\mathbb{R}$  du fait de son écriture exponentielle.

### 2.2) Propriétés algébriques

On retrouve les mêmes propriétés de la fonction exponentielle avec la fonction puissance :

## Propriété

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels strictement positifs. Pour tous nombres réels  $x, y$  on a :

$$\begin{array}{lll} (1) & a^x \times a^y = a^{x+y} & (2) \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} & (3) \quad (a^x)^y = a^{xy} \\ (4) & (ab)^x = a^x \times b^x & (5) \quad \ln(a^x) = x \ln(a) \end{array}$$

**Application :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$2^x = 3^{2x+1}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$$

.....  
.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....  
.....

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x \leq 3$$

$$x^{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2}$$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

### 2.3) Sens de variation de la fonction puissance

Considérons la fonction  $f_a$  définie sur  $\mathbb{R}$  :  $f_a(x) = a^x$ .

$f_a$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car composition de fonctions dérivables. On a :

$$f'_a(x) = \left( e^{x \ln(a)} \right)' = \ln(a) e^{x \ln(a)} = \ln(a) a^x.$$

Le signe de  $f'_a$  est donc le signe  $\ln(a)$ .

#### *Propriété* : Variation de fonctions puissances

Soit  $a$  un nombre réel strictement positif et soit  $f_a$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_a(x) = a^x$  :

- Si  $0 < a < 1$  alors la fonction  $f_a$  est **strictement décroissante** sur  $\mathbb{R}$ .
- Si  $a > 1$  alors la fonction  $f_a$  est **strictement croissante** sur  $\mathbb{R}$ .

#### *Propriété* : Limites de fonctions puissances

Soit  $a$  un nombre réel strictement positif. On a :

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

$0 < a < 1$

|        |           |           |
|--------|-----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'_a$ | —         |           |
| $f_a$  | $+\infty$ | $0$       |

$a > 1$

|        |           |           |
|--------|-----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'_a$ | +         |           |
| $f_a$  | $0$       | $+\infty$ |

### 2.4) Croissance comparée

#### *Propriété*

Pour tout entier  $n > 1$ , on a les limites suivantes :

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

2.5) Racine  $n^{\text{ième}}$ **Définition**

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On appelle la racine  $n^{\text{ième}}$  d'un nombre réel positif, le nombre noté  $\sqrt[n]{x}$  tel que :

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

**Application :**

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$\sqrt[4]{3^6} \times \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt[4]{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$$

|       |       |
|-------|-------|
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$\sqrt[3]{x} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - 1 = 0$$

|       |       |
|-------|-------|
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |

## 2.6) Étude d'une fonction contenant une fonction puissance

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x2^x$ .

1. Calculons  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

|       |       |
|-------|-------|
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |

2. Étudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.

|       |       |
|-------|-------|
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |
| ..... | ..... |

3. Représenter graphiquement  $f$  dans le repère ci-dessous, après avoir complété le tableau suivant.

|      |    |      |    |      |    |    |      |    |   |     |   |     |   |
|------|----|------|----|------|----|----|------|----|---|-----|---|-----|---|
| x    | -5 | -4,5 | -4 | -3,5 | -3 | -2 | -1,5 | -1 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
| f(x) |    |      |    |      |    |    |      |    |   |     |   |     |   |

