CALCUL INTEGRAL

Niveau : TF_7

1. INTEGRALE D'UNE FONCTION

1.1. Définition

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle K, F l'une de ses primitives et ***a*** et **b** sont deux réels appartenant à K.
On appelle intégrale de *f* entre ***a*** et ***b*** le nombre **F(*b*) – F(*a*).**
Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)dx$ et se lit : « intégrale de *a* à *b* de *f(x) dx* », *a* et *b* étant les bornes de l'intégrale.

Remarques :

- Ce nombre est indépendant de la primitive F choisie. En effet si G est une autre primitive de *f*, alors G = F +k et donc : G(*b*) – G(*a*) = F(*b*) – F(*a*).
- On note souvent $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de *f*.
- Dans l'écriture $\int_a^b f(t)\,dt$, t est une variable muette. L'intégrale entre *a* et *b* peut s'écrire

  $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f(u)du \ldots$

<u>**Exemple**</u> :

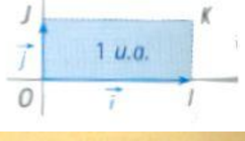
$$\int_1^2 (1-x)dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = (1 - \frac{1^2}{2}) - (2 - \frac{2^2}{2}) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

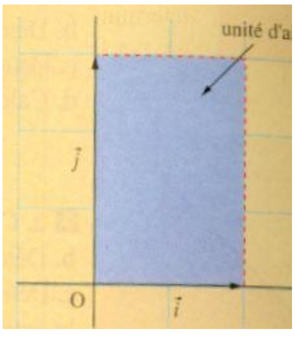
1.2. Lien entre intégrale et aire

1.2.1. Unité d'aire :

Dans un repère orthogonal (O,I ,J), l'unité d'aire (*u.a.*) est l'aire du rectangle unitaire OIAJ.

$\boxed{u.a = OI.OJ}$

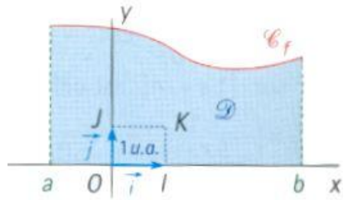




<u>Exemple :</u>
Si les unités graphiques sont 2 cm en abscisse et 3 cm en ordonnées, alors l'unité d'aire est 6 cm² ($u.a = 6cm^2$)

1.2.2. Propriété :

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle [a ; b].
L'aire, exprimée en unité d'aire , du domaine délimité par la courbe représentative de f, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses est égale à $\int_a^b f(x)dx$.



1.3. Lien entre intégrale et primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et a un réel appartenant à K.

La fonction F définie pour tout x de K par : $\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)dt}$ est la primitive sur K de la fonction f qui s'annule en a.

Démonstration :

Soit G une primitive de f . Alors pour tout x de K,

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ = G(x) – G(a) . On a: F(a) = G(a) – G(a) = 0

D'où le résultat .

2. PROPRIETES DE L'INTEGRALE

2.1. Propriétés 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et a et b deux éléments de K. On a :

- $\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$
- Inversion des bornes : $\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$

Démonstration : Soit F une primitive de f sur K et a et b deux éléments de K.
On a :

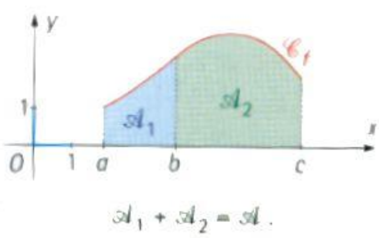
* $\int_a^a f(x)dx$ = F(a) - F(a) = 0

$\int_a^b f(x)dx$ = F(b) - F(a) = - (F(a) - F(b)) = $-\int_b^a f(x)dx$

2.2. Propriété 2 : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle K. Pour tous réels a, b et c de K on a :

$\boxed{\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx}$



Interprétation dans le cas où f est **positive** et **$a \leq b \leq c$** : $\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = \mathscr{A}$

Démonstration : Soit F une primitive de f sur K :
On a : $[F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] = F(c) - F(a)$

2.3. Propriété 3 : Linéarité

Soit f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle K et α est une constante, on a :

- $\boxed{\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx}$
- $\boxed{\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx}$

Démonstration : Soit F et G des primitives respective de f et g sur K.

- $\int_a^b (f+g)(x)dx = [(F+G)(x)]_a^b = (F+G)(b) - (F+G)(a)$

  $= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] = [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b$

  Donc $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

- $\int_a^b \alpha f(x)dx = [\alpha F(x)]_a^b = \alpha[F(x)]_a^b = \alpha\int_a^b f(x)dx$

2.4. Propriété 4 : Signe de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux éléments de K tels que $a \leq b$.

- $\boxed{\text{Si } f \geq 0 \text{ sur } [a\,;b], \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \geq 0}$
- $\boxed{\text{Si } f \leq 0 \text{ sur } [a\,;b], \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leq 0}$

Démonstration :
Soit f une fonction continue sur K et F une primitive de f sur K.

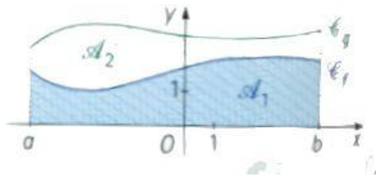
- Si f est positive sur $[a\,;b]$, alors F est croissante sur $[a\,;b]$.
  Ce qui entraine que : $F(a) \leq F(b)$. On a donc : $F(b) - F(a) \geq 0$ c-à-d. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si f est négative sur $[a\,;b]$, alors F est décroissante sur $[a\,;b]$.
  Ce qui entraine que : $F(a) \geq F(b)$. On a donc : $F(b) - F(a) \leq 0$ c-à-d. $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

2.5. Propriété 5 : Compatibilité avec l'ordre

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K , a et b deux réels de K, (avec : $a \leq b$).

$\boxed{\text{Si pour tout nombre réel } x \text{ de } [a\,;b], \text{ on a } f(x) \leq g(x), \text{ alors : } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx}$

Interprétation dans le cas où f est positive sur $[a\,;b]$:
$\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A}_2$



2.6. Propriété 6 : Inégalité Triangulaire

Si f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ alors : $\boxed{\left|\int_a^a f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx}$

3. TECHNIQUES DE CALCUL D'UNE INTEGRALE

3.1. Technique de changement de variable affine

Propriété :

Soit α et β deux nombres réels tels que $\alpha \neq 0$.
Soit f une fonction continue sur un intervalle K , a et b deux réels tels que pour tout x compris entre a et b le nombre réel $\alpha x + \beta$ appartienne à K.

On a : $\boxed{\int_a^b f(\alpha x + \beta)\, dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(u)du.}$

Démonstration:

Posons $u = \alpha x + \beta$. Ce qui implique que : $du = \alpha dx\ \ et\ dx = \frac{1}{\alpha}du$.
Pour $x = a,\ u = \alpha a + \beta$ et pour $= b,\ u = \alpha b + \beta$.
On a donc $\int_a^b f(\alpha x + \beta)\, dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(u)du$.

Application : Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}dx$.

3.2. Technique de l'intégration par parties

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle K telles que u' et v' sont continues sur K, a et b deux éléments de K.

On a : $\boxed{\int_a^b u'(x).v(x)dx = \big[u(x).v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)dx}$

Exemple

Calculons $\int_0^\pi x\sin x dx$:

Posons : $\begin{cases} u'(x) = \sin x \\ v(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = -\cos x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

Alors $\int_0^\pi x\sin x dx = \big[x(-\cos x)\big]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)dx$

Donc $\int_0^\pi x\sin x dx = \big[-x\cos x\big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \big[-x\cos x\big]_0^\pi + \big[\sin x\big]_0^\pi$

$\int_0^\pi x\sin x dx = \left(-\pi\cos\pi + 0.\cos 0\right) + (\sin\pi - \sin 0)$

D'où : $\int_0^\pi x\sin x dx = \pi$

3.3 Intégration des fonctions paires, impaires et trigonométriques

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle K centré en 0.
Pour tout a élément de K on a :

- Si f est paire alors : $\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx}$.
- Si f est impaire alors : $\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0}$.

<u>*Démonstration*</u> :
On a : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$
Intégrons $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$
Posons $t = -x\,.\,ce\ qui\ implique\ que\ dt = -dx$.
Pour $x = 0, t = 0\ \ et\ pour\ x = -a,\ \ t = a.$
Donc : $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx.$
Ce qui implique que : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$
Si f est paire alors : $f(-x) = f(x)$. Donc $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$
Si f est impaire alors $f(-x) = -f(x)$. Donc $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur IR et périodique de période p.
Pour tous réels a et b on a :

- $\boxed{\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx}$.
- $\boxed{\int_{a}^{a+p} f(x)\,dx = \int_{0}^{p} f(x)\,dx}$.

4. VALEUR MOYENNE :

<u>**Définition :**</u>

On appelle valeur moyenne d'une fonction f continue un intervalle $[a\,;\,b]$ le réel μ défini par : $\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx}$

<u>**Interprétation :**</u>

Dans le cas où f est une fonction positive sur l'intervalle [a ; b], cette valeur moyenne μ est la hauteur du rectangle ABCD, de base ($b - a$), ayant la même aire A que le domaine en bleu ci-contre.
A = μ . ($b - a$)