Chapitre 8
SUITES NUMÉRIQUES

Objectif pédagogique principal :
- Mettre en place le raisonnement par récurrence et étudier le comportement global d´une suite.

Leçon 1 : LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Objectif pédagogique :
- Utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer une propriété.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1$.
On souhaite obtenir une formule permettant de calculer explicitement u_n en fonction de n.
Le calcul des premiers termes donne :

$$\begin{aligned}
u_1 &= 2u_0 + 1 = 1 \\
u_2 &= 2u_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 \\
u_3 &= 2u_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7 \\
u_4 &= 2u_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15 \\
u_5 &= 2u_4 + 1 = 2 \times 15 + 1 = 31
\end{aligned}$$

La suite (u_n) semble obéir à une loi toute simple : On obtient les puissances successives de 2 otées de 1.
Nous pouvons donc émettre la **conjecture** suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1$.
Cette conjecture **n´est pas une preuve** ni une affirmation nécessairement vraie. Ce n´est que l´énoncé d´une propriété résultant d´un certain nombre d´observations.
Nous allons, par une démonstration, chercher à confirmer ou non cette conjecture.

Notons (P) la propriété, définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1$.

- On a vérifié que la propriété (P) était vraie au rang 0, 1, 2, 3, 4, 5. On dit que la propriété (P) est **initialisée**.
- Supposons un instant, que pour un certain entier p, on ait effectivement la propriété : $u_p = 2^p - 1$.
  Alors, on aurait : $u_{p+1} = 2u_p + 1 = 2 \times (2^p - 1) + 1 = 2 \times 2^p - 2 + 1 = 2^{p+1} - 1$.
  Ce qui correspond à la propriété (P) à l´odre $p + 1$.

  Autrement dit, si la propriété est vraie á un certain rang p alors elle l´est également au rang suivant $p + 1$.
  On dit que la propriété (P) est **héréditaire**.

Conclusion :

On a vérifié que la propriété (P) est vraie au rang 0, 1, 2, 3, 4, 5. Mais comme elle est héréditaire, elle sera vraie encore au rang $n = 6$, puis au rang $n = 7$ etc. Si bien que notre propriété est **finalement vraie à tout rang** n.

1.1) L´axiome de récurrence

Propriété

Soit une propriété (P_n)) définie sur $\mathbb{N}$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

- Si la propriété est **initialisée** à partir du rang n_0,
- et si la propriété est **héréditaire** à partir du rang n_0 ;

Alors la propriété est **vraie à partir du rang** n_0.

À retenir :

Le raisonnement par récurrence comporte deux phases :

- Prouver que la propriété est initialisée.
- Prouver que la propriété est héréditaire.

1.2) Applications

Application 1 :

Démontrer l´**inégalité de BERNOULLI** suivante : Soit un réel a strictement positif, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (1+a)^n \geq 1 + na.$$

....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

Application 2 :

La suite (v_n) est définie par : $v_0 = 1 \quad et \quad v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$.

1. Démontrer que pour tout naturel n, $\quad 0 < v_n < 2$.

....	....
....	....
....	....

2. Démontrer que la suite est strictement croissante.

Application 3 :

$\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, \quad \forall x \in [0;+\infty[$, on pose : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^x t^n e^{-t} dt.$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$, la fonction I_n est croissante sur $[0;+\infty[$.

2. À l´aide d´une intégration par parties :
   a) Calculer $I_1(x)$ pour tout x élément de $[0;+\infty[$.

   b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \forall x \in [0;+\infty[, \quad I_{n+1}(x) = (n+1)I_n(x) - x^{n+1}e^{-x}$.

3. À l´aide d´un raisonnement par récurrence, déduire de la question 2) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \forall x \in [0;+\infty[, \quad I_n(x) = n!\left[1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)\right].$$

4. Démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n(x) = n!$.

Leçon 2 : CONVERGENCE DE SUITES NUMÉRIQUES

Objectif pédagogique :

- Démontrer qu´une suite est majorée ou minorée.
- Démontrer qu´une suite est monotone.
- Démontrer qu´une suite est convergente.

2.1) Définition

Une suite numérique étant un cas particulier de fonction numérique, la notion de **limite** existe aussi pour les suites. Plus précisement de **limite en** $+\infty$, puisque $n \in \mathbb{N}$.
L´étude de la limite d´une suite est donc la même que la limite en $+\infty$ d´une fonction.

Définition

Soit (u_n) Une suite numérique.
On dit que la suite (u_n) est **convergente** si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ **existe et est finie.**
Dans le cas contraire, on dit que la suite est **divergente**.

Application : Étudier la convergence des suites suivantes :

$u_n = \dfrac{\sqrt{n-2}}{n+2} \quad n \geq 0$	$v_n = n\cos n \quad n \geq 0$
....	....
....	....
....	....
....	....

2.2) Limite de suites par comparaison

Propriété

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites numériques et $n_0 \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{R}$.

- **Théorème des gendarmes** :

  Si $\forall n \geq n_0 \quad, v_n \leq u_n \leq w_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{x \to +\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

- **Théorème de comparaison** :

  Si $\forall n \geq n_0 \quad, v_n \leq u_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

  Si $\forall n \geq n_0 \quad, u_n \leq w_n$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Application 1 :

Étudier la limite des suites suivantes :

$u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}} \quad n \geq 0$	$v_n = n + 1 - \cos n \quad n \geq 0$
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

Application 1 :

La suite (u_n) est définie, pour $n \geq 1$, par : $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

2. Démontrer que pour $n \geq 1$: $\dfrac{n^2}{n^2+1} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

3. En déduire la convergence et la limite de la suite (u_n).

.... | ....

2.3) Limite d´une suite géométrique

Propriété

Soit q un nombre réel, on a :

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n´existe pas.

Application : Soit la suite (u_n) définie paer : $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 + nu_n}{2(n+1)}$, $n \geq 1$.

On définit une suite auxiliaire (v_n) par $v_n = nu_n - 1$, $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

.... | ....

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

.... | ....

2.4) Convergence d´une suite monotone

Définition

Soit (u_n) une suite numérique, m et M deux nombres réels.

- On dit que la suite (u_n) est **minorée** par m si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n$.
- On dit que la suite (u_n) est **majorée** par M si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M$.

Une suite **bornée** est une suite à la fois minorée et majorée.

Application :

Démontrer que la suite définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}, \quad n \geq 1$, est bornée.

.... | ....

.... | ....

.... | ....

.... | ....

.... | ....

Propriété

- Si une suite est **croissante et non majorée** alors la suite **diverge** vers $+\infty$.
- Si une suite est **décroissante et non minorée** alors la suite **diverge** vers $-\infty$.
- Si une suite est **croissante et majorée** alors la suite **converge**.
- Si une suite est **décroissante et minorée** alors la suite **converge**.

Application 1 :

Soit la suite (u_n) définie paer : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}, \quad n \geq 0$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

.... | ....

.... | ....

.... | ....

.... | ....

.... | ....

.... | ....

2. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 4 puis conclure.

Application 2 :

Soit la suite (v_n) définie paer : $v_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt, \quad n \geq 1.$

1. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

2. Montrer que la suite (v_n) est positive.

3. En déduire la convergence de la suite (v_n).