

Chap
10

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALÉATOIRE

1. Probabilité conditionnelle

Définition

Définition

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.
B un évènement de Ω de probabilité non nulle.

L'application P_B qui à tout évènement A de Ω associe le nombre réel $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est une probabilité sur Ω .

$P_B(A)$ est appelée probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé ou plus simplement la probabilité de A sachant B.

On la note aussi $P(A/B)$.

Conséquences :

A et B sont des évènements de Ω de probabilités non nulles. On a :

$$\blacksquare P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\blacksquare P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B).$$

$$\blacksquare P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\blacksquare P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A).$$

Évènements indépendants

Définition

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω .

Deux évènements A et B de Ω sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre, c'est-à-dire $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$.

Conséquence :

Deux évènements A et B de Ω sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque :

Dans la pratique, c'est cette conséquence qu'on utilise pour démontrer que deux évènements sont indépendants.

Propriété

A et B sont des évènements d'un univers Ω de probabilités non nulles.

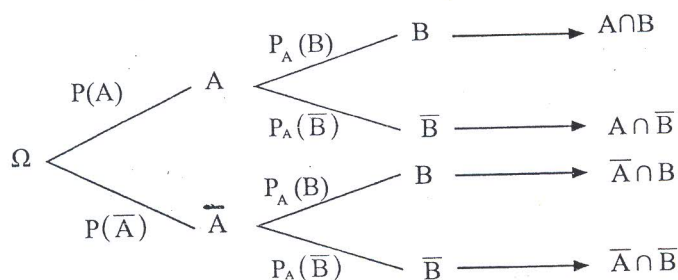
- Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B (resp A et $\bar{B}$) sont indépendants.
- Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Arbre de probabilité

Définition

Un arbre de probabilité (ou arbre pondéré) est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire connaissant des probabilités conditionnelles.

En voici une présentation :



Exemple :

Un magasin propose des réductions sur les trois marques d'ordinateurs qu'il distribue. La marque A représente 64 % des ordinateurs vendus ; la marque N, 28 % ; la marque O en représente 8 %. 30 % des ordinateurs de la marque A, 60 % de la marque N et 80 % de ceux de la marque O sont soldés.

On interroge au hasard un client ayant acheté un ordinateur de ce magasin.

1. Construis un arbre de probabilité décrivant la situation.
2. Détermine la probabilité qu'il ait acheté un ordinateur de la marque A et soldé.
3. Détermine la probabilité qu'il ait acheté un ordinateur de la marque O et non soldé.

Réponse :

1. Considérons les évènements suivants.

A : « L'ordinateur est de la marque A » ;

N : « L'ordinateur est de la marque N » ;

O : « L'ordinateur est de la marque O » ;

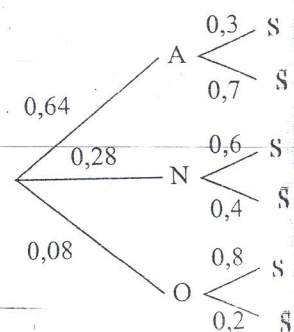
S : « L'ordinateur est soldé ».

2. La probabilité qu'il ait acheté un ordinateur de la marque A et soldé est :

$$P(A \cap S) = 0,64 \times 0,3 = 0,192.$$

3. La probabilité qu'il ait acheté un ordinateur de la marque O et non soldé est :

$$P(O \cap \bar{S}) = 0,08 \times 0,2 = 0,016.$$



Formule des probabilités totales

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements de Ω deux à deux incompatibles et dont la réunion donne Ω .

Pour tout événement B de Ω , on a : $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$.

2. Variable aléatoire

Définition

Ω est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

On appelle variable aléatoire X sur Ω toute application de Ω vers $\mathbb{R}$.

Notation et vocabulaire

- L'ensemble des valeurs prises par X se note $X(\Omega)$.
- $(X = x_i)$ désigne l'événement « X prend la valeur x_i ».
- $(X < a)$ désigne l'événement « X prend une valeur strictement inférieure à a ».

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition

X est une variable aléatoire définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.

On appelle loi de probabilité de X (ou distribution de X), l'application qui à chaque valeur x_i prise par X associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X peut être présentée par un tableau :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

On a : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition

X est une variable aléatoire définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.

$\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$, l'ensemble des valeurs prises par X .

On appelle fonction de répartition de X , l'application F de $\mathbb{R}$ vers $[0; 1]$ définie par : $F(x) = P(X \leq x)$.

$$\text{On a : } \begin{cases} \text{Pour } x < x_1, & F(x) = 0 \\ \text{Pour } x_1 \leq x < x_{i+1}, & F(x) = F(x_{i-1}) + P(X = x_i) \\ \text{Pour } x_n \leq x, & F(x) = 1 \end{cases}$$

Espérance mathématique

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1; x_2; \dots; x_n$, avec les probabilités respectives $p_1; p_2; \dots; p_n$.

On appelle espérance mathématique de X , le nombre réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Variance

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1; x_2; \dots; x_n$, avec les probabilités respectives $p_1; p_2; \dots; p_n$ et $E(X)$ l'espérance mathématique de X .

On appelle variance de X , le nombre réel positif noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2.$$

Autre expression de la variance

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2) - [E(X)]^2.$$

. Écart type

Soit X une variable aléatoire de variance $V(X)$.

On appelle écart type de X , le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

3. Loi binomiale

. Épreuve de Bernoulli

Definition

On appelle épreuve de Bernoulli, toute expérience aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités.

L'une est appelée « succès » et l'autre « échec ».

. Schéma de Bernoulli

Definition

On appelle schéma de Bernoulli une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Le nombre n d'épreuves et la probabilité p du succès sont appelés paramètres du schéma de Bernoulli.

. Loi binomiale

Definition

Soit E un schéma de Bernoulli à n épreuves.

Pour une épreuve, on note p la probabilité du succès et q ($q = 1 - p$) celle de l'échec.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque éventualité de E associe le nombre k de succès ($0 \leq k \leq n$). On a :

• L'ensemble des valeurs prises par X est : $\{0; 1; \dots; n\}$.

• La probabilité d'obtenir exactement k succès au cours des n épreuves est :

$$P(X = k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k}.$$

La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p .

On la note $B(n; p)$.

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres n et p .

On a : $E(X) = np$.

$V(X) = np(1 - p)$.