

Chapitre 7

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Objectif pédagogique principal :

- Découvrir une nouvelle notion utile pour d'autres disciplines comme l'économie, les sciences physiques, la géographie etc.

Leçon 1 : GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Objectif pédagogique :

- Résoudre une équation différentielle de premier ordre ou de second ordre à coefficient constant.

1.1) Définition

Activité :

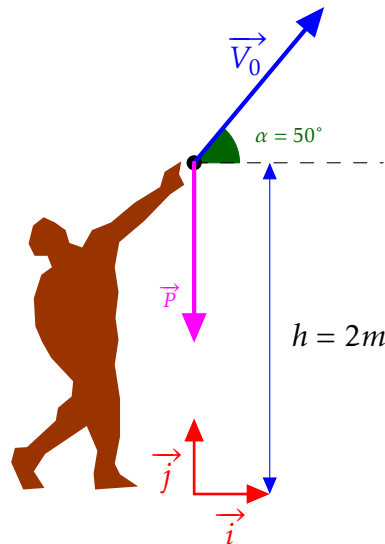
RANDY BARNES est le recordman mondial du lancer de poids.

Son lancer, effectué en 1990,

est schématiser ci-dessous :

- $\vec{V}_0$ est la vitesse initiale du poids au lancer : $V_0 = 14,64 \text{ ms}^{-1}$,
- h est la hauteur à laquelle le poids est lancé ;
- $\vec{P}$ est le vecteur poids de la boule lancée ;
- La masse de la boule est de $7\,260 \text{ g}$.

L'objectif de cette activité est de déterminer la longueur du lancer de BARNES.



Assimilons la boule à un objet ponctuel $M \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ de masse m . $x(t)$ et $y(t)$ donnant la position du point M en fonction du temps t .

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à ce point, on obtient (On néglige les frottement dus à l'action de l'air sur la boule) :

$$m\vec{a} = \vec{P} \quad ; \quad \vec{a} \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \text{ étant le vecteur accélération du point } M.$$

On obtient alors les équations suivantes :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ces équations sont

La résolution de ces équations nous donne :

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Exprimons maintenant y en fonction x pour déterminer la performance de BARNES.

.....

.....

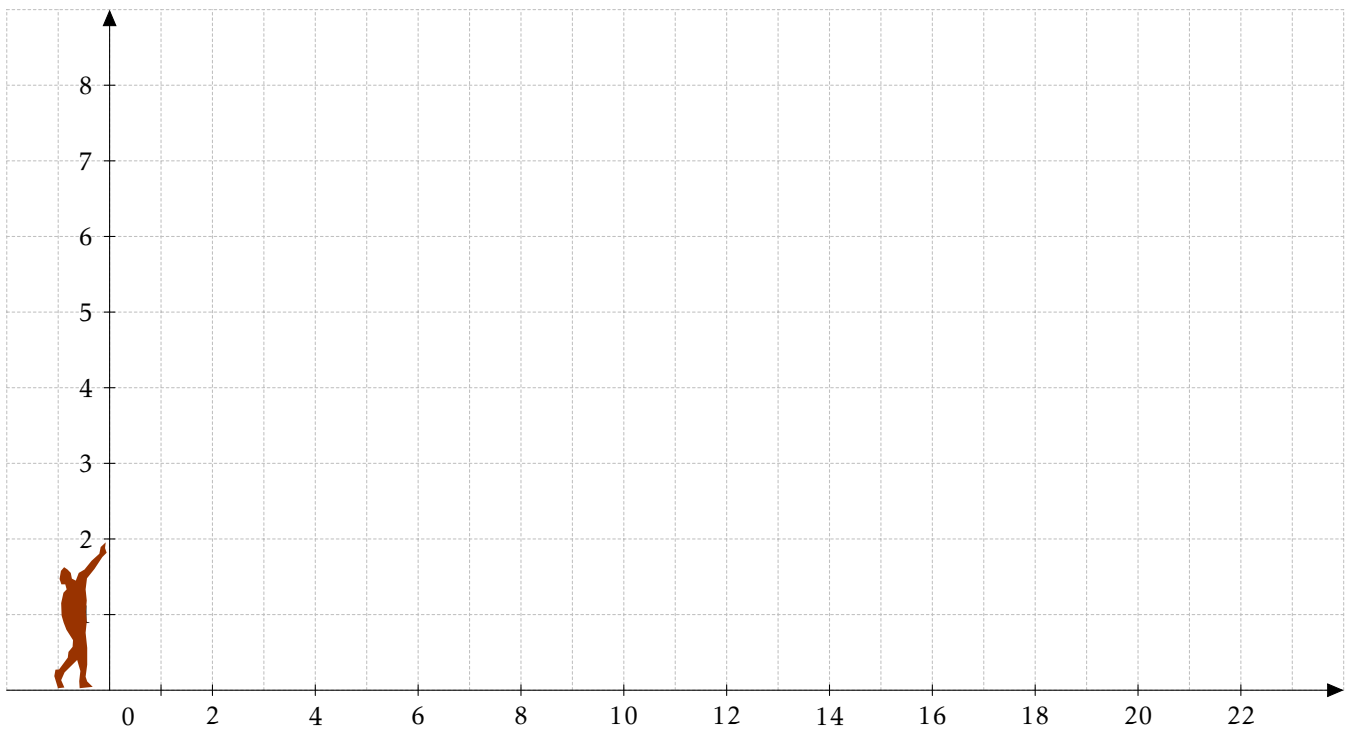
.....

.....

.....

.....

Représentons ci-dessous la trajectoire de la boule lancée par Barnes.



Définition

Une **équation différentielle** est une équation dont l'**inconnue est une fonction** y et dans laquelle apparaissent une ou plusieurs **dérivées de cette fonction**.

L'**ordre** d'une équation différentielle est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé apparaissant dans l'équation.

Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer **toutes les fonctions qui vérifient** cette équation.

1.2) Équations différentielles du premier ordre à coefficients constants

Définition

Soit a, b des nombres réels tels que $a \neq 0$ et ϕ une fonction continue.

L'équation (E) : $ay' + by = \phi(x)$ est dite équation différentielle du **premier ordre** car elle ne fait qu'intervenir la fonction inconnue y et sa dérivée première y' .

(E) est dite à coefficients constants car a, b sont constants.

Propriété

- L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions f_k définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = ke^{ax}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay + b$ $a \neq 0, \quad b \neq 0$ est l'ensemble des fonctions f_k définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Application 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $2y' + 3y = 0$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

2. Déterminer la solution f de l'équation (E) telle que $f(2) = 1$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Application 2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_2) : $y' = -2y + 5$.

.....	
.....	
.....	

2. Déterminer la solution g de l'équation (E_2) telle que $g(0) = 2$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Application 3 :

Considérons l'équation différentielle (1) $y' + 2y = (2x + 1)e^{-2x}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (2) : $y' + 2y = 0$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

2. Soit a et b deux nombres réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^{-2x}$.

- a) Déterminer a et b pour que la fonction u soit une solution de l'équation (1).

.....	
.....	
.....	
.....	

- b) Démontrer qu'une fonction v est solution de (1) si et seulement $v - u$ est solution de (2).

.....	
.....	
.....	
.....	

- c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).

.....	
.....	
.....	
.....	

3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

.....	
.....	

1.3) Équations différentielles du 2nd ordre à coefficients constants

Définition

Soit a ; b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$ et ϕ une fonction continue.

L'équation (E) : $ay'' + by' + cy = \phi(x)$ est dite équation différentielle du **second ordre**.

(E) est dite à coefficients constants car a , b et c sont constants.

Propriété

Soit (E_h) $ay'' + by' + cy = 0$ une équation différentielle du second ordre **sans second membre** et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant :

- Si $\Delta > 0$ Posons $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ alors la solution générale de l'équation (E_h) est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y_h(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \quad A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta = 0$ Posons $r = -\frac{b}{2a}$ alors la solution générale de l'équation (E_h) est définie par :
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad y_h(x) = (AX + B)e^{rx} \quad A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}.$

- Si $\Delta < 0$ Posons $r = -\frac{b}{2a}$ et $\omega = \left| \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right|$ alors la solution générale de l'équation (E_h) est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y_h(x) = (A \cos \omega x + B \sin \omega x) e^{rx} \quad A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}.$$

Application 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + \frac{\pi^2}{9}y = 0$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

2. Déterminer la solution f de l'équation (E) telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 5$.

.....	
.....	
.....	
.....	

Application 2 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $2y'' - 3y' + y = 0$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

2. Déterminer la solution h de l'équation (E) telle que $h(0) = 0$ et $h'(0) = -\frac{1}{2}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Application 3 :

Considérons l'équation différentielle (1) $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (2) : $y'' - 2y = 0$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

2. Soit a et b deux nombres réels et soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (ax + b)e^{x^2}$.
a) Déterminer a et b pour que la fonction h soit une solution de l'équation (1).

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

- b) Démontrer qu'une fonction g est solution de (1) si et seulement $g - h$ est solution de (2).

.....	
.....	
.....	
.....	

- c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).

.....	
.....	
.....	
.....	

3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 1.

.....	
.....	